

KONSTRUKSI ALGORITMA PEWARNAAN TITIK PELANGI PADA GRAF POHON

Widya Eka Pranata^{1*}, Mohamad Ilyas Abas², Irawan Ibrahim³, Rizal Lamusu⁴, Syahrial⁴
^{1,2,3,4} Program Studi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Gorontalo

Coresponding: widyapranata@umgo.ac.id*

Submitted: 12-01-2025; Accepted: 01-02-2025; Published: 01-02-2025

ABSTRACT

This study constructs an algorithm for rainbow vertex coloring in tree graphs. A graph G is defined as a set pair $G=(V,E)$, where V is the vertex set and E is the edge set. Rainbow dot coloring aims to assign a color to each vertex of a tree graph T , such that each path in the tree has vertices with unique colors. The rainbow dot coloring algorithm developed in this study is implemented in a programming language, and its performance is evaluated through simulations on various types of tree graphs. The results show that this algorithm can effectively color tree graphs with good optimality. This research contributes to graph coloring theory and its potential to be applied to computational problems involving tree graphs with complex structures.

Keywords: Point coloring algorithm, Tree graph

ABSTRAK

Penelitian ini mengkonstruksi algoritma untuk pewarnaan titik pelangi pada graf pohon. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $G=(V,E)$, di mana V adalah himpunan simpul (vertex) dan E adalah himpunan sisi (edge). Pewarnaan titik pelangi bertujuan untuk memberikan warna pada setiap simpul graf pohon T , sedemikian rupa sehingga setiap jalur dalam pohon memiliki simpul-simpul dengan warna yang unik. Algoritma pewarnaan titik pelangi yang dikembangkan pada penelitian ini diimplementasikan dalam bahasa pemrograman, dan performanya dievaluasi melalui simulasi pada berbagai jenis graf pohon. Hasil menunjukkan bahwa algoritma ini dapat secara efektif mewarnai graf pohon dengan tingkat optimalitas yang baik. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam teori pewarnaan graf serta potensinya untuk diterapkan pada masalah-masalah komputasi yang melibatkan graf pohon dengan struktur yang kompleks.

Keywords: Algoritma pewarnaan titik, Graph pohon

1. PENDAHULUAN

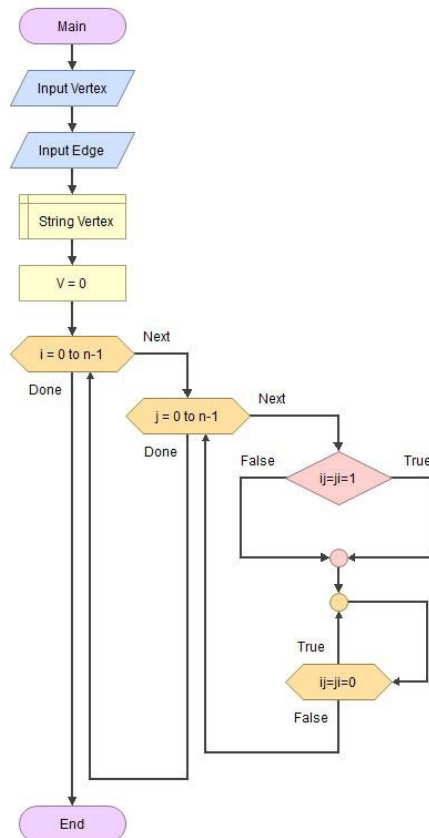
Pewarnaan pelangi pada graf pertama kali diperkenalkan oleh [1] dan kemudian dikembangkan oleh [2] dengan konsep pewarnaan titik pelangi. Pewarnaan titik pelangi pada suatu graf bertujuan untuk menentukan lintasan antara dua titik yang warna titik-titik internalnya berbeda [3]. Pada graf pohon, pewarnaan titik pelangi mempunyai bilangan minimum yang disebut bilangan terhubung pelangi [2][4]. Salah satu masalah pewarnaan graf adalah pewarnaan titik pelangi (*rainbow vertex connection*). Pewarnaan ini memiliki sifat unik, yaitu setiap jalur dalam graf harus memiliki titik-titik yang diwarnai secara berbeda atau unik [5]. Khususnya, pada graf pohon, yang merupakan subkelas graf sederhana tanpa siklus, pewarnaan titik pelangi menjadi menarik untuk diteliti karena pohon memiliki struktur yang lebih teratur dan dapat dimodelkan untuk berbagai aplikasi praktis seperti pengelompokan data dan jaringan komunikasi [6].

Untuk mempermudah penyelesaian masalah dalam graf adalah melalui pendekatan komputasi, yang diimplementasikan dalam bentuk pemrograman komputer. Pemrograman memungkinkan integrasi beberapa algoritma ke dalam suatu bahasa pemrograman tertentu, sehingga menghasilkan program yang dapat mengeksekusi tugas-tugas secara otomatis [7]. Algoritma sendiri adalah serangkaian langkah-langkah logis yang disusun secara sistematis untuk menyelesaikan suatu masalah. Setiap algoritma memiliki pendekatan dan

metode kerja yang berbeda dalam menemukan solusi optimal, tergantung pada karakteristik masalah yang dihadapi [8] [9].

Hingga saat ini, belum ada algoritma yang efektif yang dapat digunakan untuk menentukan pewarnaan pelangi ataupun pewarnaan titik pelangi untuk graf pohon maupun sebaran graf [10]. Untuk itu, penelitian ini akan membahas bagaimana mengkontruksi atau membangun sebuah algoritma untuk mencari pewarnaan titik pelangi.

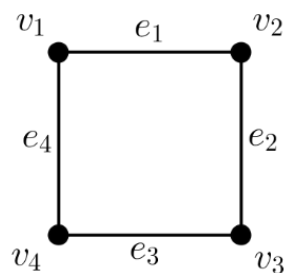
2. METODE PENELITIAN



Gambar 1. Tahapan Penelitian

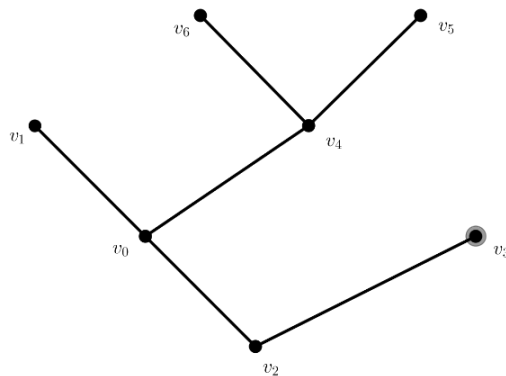
1. Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) yang di notasikan dengan $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan titik pada graf G yang dinotasikan $V(G)$ dan E adalah himpunan sisi pada graf G yang dinotasikan $E(G)$. Sebagai contoh untuk himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 2. $V(G) \vee 4$ dan $E(G) \vee 4$

Graf T dikatakan sebagai sebuah pohon jika graf T merupakan graf terhubung yang tidak memuat *cycle* serta memiliki n buah titik dan $n - 1$ buah sisi. (Edmonds, 1965).

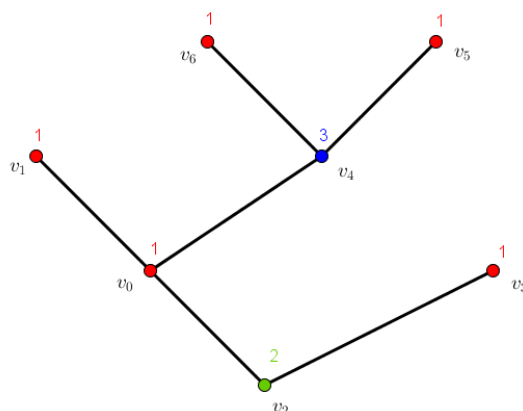


Gambar 3. Graf pohon T_7

Pewarnaan graf merupakan salah satu konsep yang dikenal dengan memberikan warna pada titik atau sisi dari suatu graf. Dalam pewarnaan graf, terdapat tiga macam pewarnaan graf (*graph colouring*), yaitu pewarnaan sisi, pewarnaan titik dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik adalah memberikan warna pada setiap titik yang ada di graf, warna yang digunakan dapat berupa elemen dalam himpunan apapun, misalkan himpunan warna yaitu merah, kuning, hijau, biru dan lain sebagainya, adapun yang sering menggunakan himpunan bilangan bulat positif.

Dalam teori graf, lintasan pada graf dengan pewarnaan sisi dikatakan pelangi jika tidak terdapat warna yang sama pada dua sisi dalam lintasan tersebut. Suatu graf dikatakan terhubung pelangi jika terdapat lintasan pelangi diantara setiap pasang titik-titiknya. (Chartrand et al., 2008)

Misalkan graf G adalah graf terhubung tak trivial dan pewarnaan titik $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan k adalah bilangan asli. Suatu lintasan P dikatakan lintasan titik pelangi jika titik-titik dalam lintasan P berwarna berbeda. Pewarnaan- k titik pada graf G dikatakan terhubung titik pelangi jika untuk u dan v di $V(G)$ terdapat lintasan pelangi yang menghubungkannya. Berikut adalah contoh pewarnaan titik pelangi pada suatu graf.



Gambar 4. Pewarnaan titik pelangi graf T_7

2. Algoritma

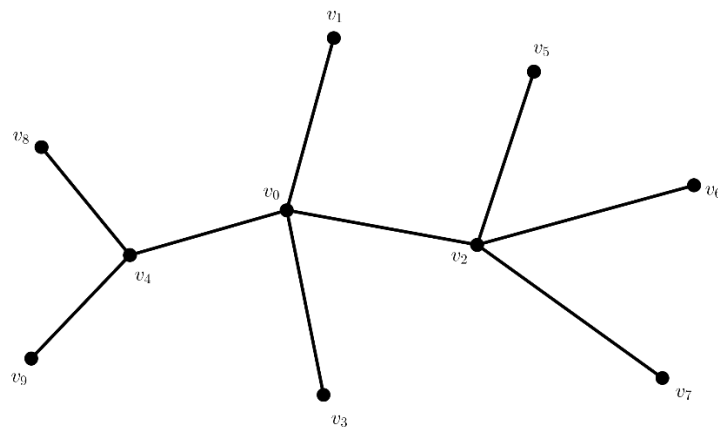
Algoritma yang dibangun melalui proses logika, metode dan tahapan (urutan) sistematis yang digunakan untuk memecahkan suatu permasalahan, dalam konteks lain algoritma adalah spesifikasi urutan langkah untuk melakukan pekerjaan tertentu. Penyajian algoritma secara garis besar bisa dalam 2 bentuk yaitu, tulisan dan

gambar. Algoritma yang disajikan dengan tulisan dapat menggunakan bahasa tertentu misalnya bahasa Indonesia atau bahasa Inggris dan *pseudocode*. *Pseudocode* adalah deskripsi algoritma yang merepresentasikan langkah-langkah pada algoritma tersebut.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Pewarnaan Titik Pelangi Pada Graf Pohon T

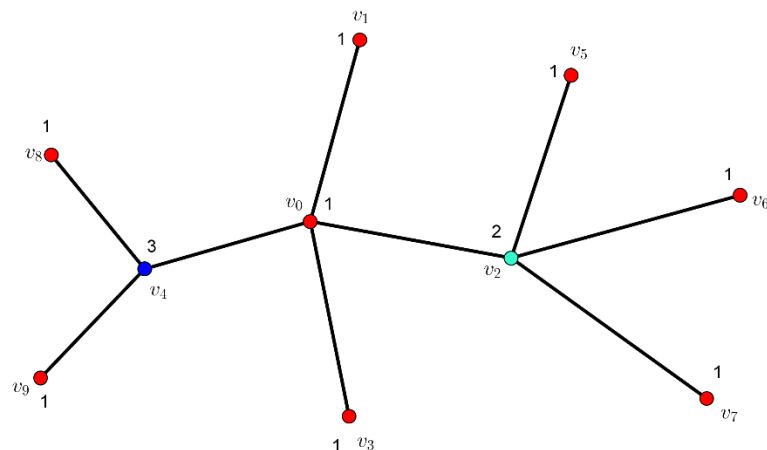
Diberikan graf pohon T_{10} . T_{10} merupakan graf pohon yang memiliki 10 buah titik dan 9 buah sisi. Graf T_{10} dibentuk oleh himpunan titik $V(T) = \{v_i | i \in \{0, \dots, 9\}\}$ dan himpunan sisi $E(T) = \{v_0 v_i | i \in \{1, \dots, 4\}\} \cup \{v_2 v_i | i \in \{5, 6, 7\}\} \cup \{v_4 v_i | i \in \{8, 9\}\}$.



Gambar 5. Graf T_{10}

Untuk menentukan warna pada setiap titik v_j , dengan $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ perlu diperhatikan derajat pada setiap titik. Untuk v_0 dan setiap $d(v_j) = 1$ akan diberi warna 1 (merah). Karena v_0 dan $d(v_j) = 1$ adalah $v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$, maka untuk v_2 dan v_4 tidak dapat diberi warna 1 (merah). Hal ini dapat dilihat dari lintasan v_5, v_2, v_0, v_4, v_7 sudah melewati warna 1 (merah) di v_0 , sehingga v_2 dan v_4 tidak dapat lagi diberi warna 1 (merah). Jika v_2 diberi warna 2 (hijau), maka v_4 tidak dapat diberi warna 2 (hijau), Hal ini dapat dilihat dari lintasan v_5, v_2, v_0, v_4, v_8 karena sudah melewati warna 2 (hijau) sehingga tidak dapat lagi diberi warna 2 (hijau). Untuk itu v_4 diberi warna 3 (biru). Berikut pewarnaan tersebut :

$$c(v) = \begin{cases} v_i = 1, & \text{untuk } i = 0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 \\ v_2 = 2, \\ v_4 = 3, \end{cases}$$



Gambar 6. Pewarnaan Titik Graf T_{10}

Selanjutnya untuk mengetahui pewarnaan tersebut, dapat dilihat pada lintasan pelangi di setiap dua pasang titik di graf pohon. Untuk dua pasang titik saling bertetangga pada graf pohon terdapat lintasan pelangi. Akan ditunjukkan untuk dua pasang titik yang tidak saling bertetangga sebagai berikut :

Tabel 1. Lintasan Titik Pelangi T_{10}

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan
1	v_1	v_i	$i = 5,6,7$	v_1, v_0, v_2, v_i
2	v_1	v_i	$i = 8,9$	v_1, v_0, v_4, v_i
3	v_2	v_i	$i = 8,9$	v_2, v_0, v_4, v_i
4	v_3	v_i	$i = 8,9$	v_3, v_0, v_4, v_i
5	v_3	v_i	$i = 5,6,7$	v_3, v_0, v_2, v_i
6	v_4	v_i	$i = 5,6,7$	v_4, v_0, v_2, v_i
7	v_i	v_j	$i = 8,9$ dan $j=5,6,7$	v_i, v_4, v_0, v_2, v_j

2. Algoritma Pewarnaan Titik Pelangi pada Graf Pohon T

Algoritma pewarnaan titik pelangi untuk menentukan pewarnaan titik pelangi pada graf pohon T dengan $|V(T)| = n$ untuk n bilangan positif akan diberikan sembarang. Masukan (*input*) pada algoritma adalah barisan sisi dari graf pohon dan tujuannya (*output*) adalah mencari pewarnaan titik pelangi pada graf pohon. Langkah awal adalah membaca masukan, selanjutnya mentransformasikan barisan sisi menjadi matriks ketetanggaan untuk setiap dua pasang titik yang terhubung bernilai 1, dan 0 untuk titik yang tidak terhubung. Kemudian membentuk kolom jumlah titik yang terhubung dengan menjumlahkan semua barisan. Terakhir membentuk kolom pewarnaan titik pelangi. Berikut algoritma dari pewarnaan titik pelangi pada graf pohon:

```

Algoritma 1 Pewarnaan Titik Pelangi pada Graf Pohon
1 Input : Barisan sisi dari graf pohon T
2 Output : Pewarnaan titik pelangi pada graf pohon T
3 Baca masukkan barisan sisi dari graf T
4 Susun matriks ketetanggaan dari graf T = A
5 Masukkan 1 untuk setiap dua pasang titik yang terhubung dan
6 masukkan 0 untuk titik yang tidak terhubung.
7 for i = 0,1,...,n-1
8   for j = 0,1,...,n-1
9     if [i] dan [j] bertetangga
10      A[i][j]=A[j][i]=1
11   else
12     A[i][j]=A[j][i]=0
13 Nilai tersebut di masukkan dalam baris dan kolom yang sesuai.
14 Hitung derajat satu titik
15 Buat array S[i] = Himpunan jumlah derajat
16 for i = 0,1,...,n-1

```

```

17  sum(0)=A[i][0]
18  for j = 1,2,...,n-1
19      sum(j)=sum[j-1]+A[i][j]
20  for k = [0, n-1]
21      S[i] += sum[k]
22  Pewarnaan titik pelangi pada graf T
23  Buat array C = Himpunan Pewarnaan
24  S[0] = 1
25  for i = 1,...,n
26      if S[i] 1
27          C[i] += 1
28      else
29          C[i] = 1
30  return Pewarnaan Titik Pelangi T

```

4. KESIMPULAN

Mengkonstruksi algoritma pewarnaan titik pelangi pada graf pohon menjadi langkah awal untuk membuat program pewarnaan titik pelangi pada graf pohon. Algoritma pewarnaan titik pelangi diimplementasikan pada program dengan menggunakan bahasa pemrograman. Program pewarnaan titik pelangi pada graf pohon dibuat untuk mempermudah dan mempersingkat waktu kerja dalam mencari pewarnaan titik pelangi pada graf pohon.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] T. L. Chartrand, J. Huber, B. Shiv, and R. J. Tanner, "Nonconscious goals and consumer choice," *J. Consum. Res.*, vol. 35, no. 2, pp. 189–201, 2008, doi: 10.1086/588685.
- [2] M. Krivelevich and R. Yuster, "The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree," *J. Graph Theory*, vol. 63, no. 3, pp. 185–191, 2010, doi: 10.1002/jgt.20418.
- [3] A. E. Hader, "Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf Korona Kipas dan Roda Dengan Graf Trivial," *Simtika*, vol. 3, no. 1, pp. 31–34, 2020.
- [4] A. F. Akadji, D. Taha, N. Lakisa, and N. I. Yahya, "Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Amalgamasi Graf Berlian," *Euler J. Ilm. Mat. Sains dan Teknol.*, vol. 7, no. 2, pp. 56–61, 2019, doi: 10.34312/euler.v7i2.10345.
- [5] A. Maulani and H. Waryanto, "Pengenalan TikZ dari Graf $Br_3 \odot P_4$," *J. Edumath*, vol. 9, no. 2, pp. 84–91, 2023.
- [6] Ruth Haryanti, Vip Paramarta, Maharanny Wulansari, Aulia Dini Rachmadanti, and Febri Diotama, "Sistem Informasi Manajemen Internet Dan Ekstranet," *Maeswara J. Ris. Ilmu Manaj. dan Kewirausahaan*, vol. 1, no. 6, pp. 262–271, 2023, doi: 10.61132/maeswara.v1i6.408.
- [7] R. Kango, N. Jamal, and M. I. Abas, "Analysis of End-to-End Delay Video Conferencing Services on a Mobile Ad Hoc Network," *J. Informatics Telecommun. Eng.*, vol. 6, no. 2, pp. 393–402, 2023, doi: 10.31289/jite.v6i2.8231.
- [8] M. I. Abas, Syafruddin Syarif, Ingrid Nurtanio, and Zulkifli Tahir, "Comparison of Convolutional Neural Network Methods for the Classification of Maize Plant Diseases," *Regist. J. Ilm. Teknol. Sist. Inf.*, vol. 10, no. 1, pp. 46–59, Mar. 2024, doi: 10.26594/register.v10i1.3656.

- [9] M. I. Abas and Syahrial, "Sistem informasi geografis tempat wisata," *Semin. {Nasional} {Sistem} {Informasi}*, no. September, pp. 585–590, 2017.
- [10] I. Lihawa, S. Ismail, I. K. Hasan, L. Yahya, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, "Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Prisma ($P_{(m,2)}$) dan Graf Lintasan (P_3)," *Jambura J. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 145–151, 2022, doi: 10.34312/jjom.v4i1.11826.